Coloquio 10/02/09-Tema 1

1. Hallar κ de manera que el flujo saliente del campo $\overline{f}(x,y,z)=(2x+3y,\ 2y+3z^2,\ 6y-3z)$ a través de la frontera del cuerpo definido por: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le 16 \\ x^2+y^2 \le \kappa^2,\ 0<k<4 \end{cases}$ sea $\frac{148}{3}\pi$.

2. Sea $\vec{f}: R^3 \to R^3$ un campo vectorial C^1 y la curva C parametrizada por $\gamma(t)=(4\cos t,\ 1\ ,4sent)$ con $t \in [0,\pi]$.
Sabiendo que $\int_C \vec{f}\,.\,\vec{ds}=-8$ y que $rot\,\vec{f}=(z,\ -x\ ,\ 2)$, calcular la integral de línea del campo $\vec{f}$ a lo largo de la recta $L: \begin{cases} y=1 \\ z=0 \end{cases}$ desde $(-4,1,0)$ hasta $(4,1,0)$.

3. Calcular la integral de línea del campo $\vec{f}(x,y)=(2x^3y^2+\frac{y^3}{3}\ ,\ x^4y+y^2x)$ a lo largo de la curva solución de la ecuación diferencial $xy'=5x^2-3y$ desde $(2,\ 3)$ hasta $(\ 1\ ,\ y(1))$.

4. Sea C la curva definida como intersección de las superficies
$S_1: \varphi(u,v)=(v\cos(u)\ ,v\,sen(u)\ ,2-v^2)$ con $\begin{cases} 0 \le u \le 2\pi \\ 0 \le v \le \sqrt{2} \end{cases}$ y
$S_2:\ y=x^2$
a) Hallar una parametrización de C y graficarla.
b) Hallar la masa de un alambre cuya forma coincide con la de la curva C, sabiendo que su densidad en cada punto está dada por la función $\delta(x,y,z)=\sqrt{1+8x^2+16x^4+16x^6}$.

5. Hallar los extremos de la función $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ restringida a la curva
$C \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1 \\ x+2z=3 \end{cases}$

Coloquio 17/02/09-Tema 1

1. Sea $\Omega \subset R^3$ definida por $x^2+z^2 \le 3$, $0 \le y \le 3-\sqrt{x^2+z^2}$.
   Calcular el flujo del campo $\overline{f}(x,y,z)=(2x-y,3y,z)$ a través de la superficie borde de Ω.
   Indicar en un gráfico la dirección del vector normal elegido.

2. Sea C la curva definida por $x^2+az^2=1$, $y=1$, $a>0$ y $F:R^3 \to R^3$ un campo C^2 que satisface que $rotF=(1,1-xy,xz)$.
   Hallar $a>0$ de manera que la circulación de F a lo largo de C sea 3π.
   Orientar la curva de manera que en $(-1,1,0)$ la tangente tenga coordenada z positiva.

3. Hallar la ecuación de la familia de curvas ortogonales a las curvas definidas por $x=ky^3$.

4. Si $A \subset R^2$ es una región de área 2, calcular el área de $B=\{(x,y)\in R^2:(3x-y,x+y)\in A\}$.

5. Sea $g:R^3 \to R$ una función C^1.
   Calcular la circulación del campo $\overline{F}(x,y,z)=(xy-9yg(x,y,z),2g(x,y,z),3xg(x,y,z))$ desde $(x_0,1,z_0)$ hasta $(x_1,8,z_1)$ a lo largo de la curva C cuyos puntos pertenecen a la superficie de ecuación $z=y-x^2$, y su proyección sobre el plano xy cumple con la ecuación $y=x^3$.

Coloquio 24/02/09-Tema 1

1. Calcular el flujo del campo $\overline{F}(x,y,z)=(y^2,x^2,z^2)$ a través de la superficie $x=\sqrt{4-y^2-z^2}$ con $x\geq 0$. Considere la normal de componente x positiva.

2. Sea $P:R^3\to R$ una función C^2 en R^3.
   Hallar la circulación del campo $\overline{F}(x,y,z)=(2x+2P(x,y,z),2y,P(x,y,z)+2z)$ a lo largo de la curva C de ecuaciones $z=4-x^2-y^2$, $x^2-2x+y^2=0$, orientada de manera que su tangente en $(2,0,0)$ tenga coordenada y positiva.
   Sugerencia: Comprobar que C es una curva plana.

3. Sea S una porción de área 2 del cono de ecuación $z=\sqrt{x^2+y^2}$.
   Calcular el flujo del campo $\overline{F}(x,y,z)=(x,y,1+z)$ a través de S, considerando la normal de componente z positiva.

4. Un corcho flota en la superficie de un estanque y su velocidad depende de su posición según $V(x,y)=(y,-2x)$.
   Hallar la trayectoria del corcho si a tiempo $t=0$ está en el punto de coordenada $(1,0)$.

5. Calcular el trabajo del campo $\overline{F}(x,y)=(e^x sen(y)+3y,e^x\cos(y)+2x-y)$ a lo largo de la curva definida por: $4x^2+y^2=4$, $y\geq 0$ desde el (1,0) hasta el (-1,0).

1. Sea C la curva definida como intersección de las superficies de ecuaciones:
   $x = y^2$, $z = y$ con $-2 \leq \; y \leq 1$.
   Calcular el trabajo del campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, -y)$ sobre una partícula cuya trayectoria es la curva C, sabiendo que su vector velocidad tiene componente y positiva.

2. Sea $\vec{F}(x, y, z) = (x\ z - 5\ sen(y), y\ z + h(x, z), z - x\ cos(y - 2))$ con h un campo escalar $C^\infty(R^2)$.
   Sea C la curva definida como intersección de las superficies de ecuaciones:
   $y = \sqrt{x^2 + 4z^2}$; $y = 6 - x^2 - 4z^2$.
   Calcule la circulación del campo $\vec{F}$ a lo largo de la curva C. Indique en un gráfico la orientación elegida para la curva.

3. Hallar el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano tangente al gráfico de $f(x, y) = y^2 + 1$ en el punto $(2, 1, f(2, 1))$.

4. Sea la familia de curvas de ecuaciones $y = k(x + 3)^2 + 1$. Hallar una curva perteneciente a la familia ortogonal a la familia dada que encierre una región de área 8π.

5. Determinar los valores de a y $b \in R$ para que el flujo del $\nabla\varphi$ a través de la superficie S alcance valores extremos, con S orientada de manera que el vector normal en el punto $(0, 0, 5)$ tenga componente z positiva, sabiendo que:

   - $a + b = 2$, $0 \leq a \leq 2$.
   - φ es un campo escalar $C^2(R^3)$, armónico en R^3
   - $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) = \dfrac{1}{\pi}\left(a^2x^2 + b^2z^2\right)$.
   - $S = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 5z\ ; z > 1\}$.

1. Sea $U(x, y, z) = x\,z + y^2$ una función potencial del campo $\vec{F}$. Calcular el flujo de $\vec{F}$ a través del plano tangente a la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ en el punto $(2, 1, 1)$ en el primer octante. Indique en un gráfico la orientación elegida para el plano.

2. Dada $f(x, y) = (x + 3)^3\, y^2 + x^2 + 2\,y$, hallar su derivada direccional máxima en el punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 12$ más alejado del punto $(3\sqrt{3}, -3)$.

3. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto limitado por las rectas $x - y = 1$, $y = 0$, $x - y = 2$, $x = 0$. Calcular

$$\iint_D e^{\frac{x+y}{x-y}}\; dx\, dy.$$

   Sugerencia: usar $u = x + y$, $v = x - y$.

4. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\,(x, a\,y)$.

   a) Encontrar el valor de a para que $\vec{F}$ sea conservativo y con ese valor hallar las expresiones de las líneas de campo.

   b) Comprobar que las líneas de campo halladas en (a) son ortogonales a las curvas equipotenciales y graficarlas.

5. Sean $f(x, y, z) = x\,y + z^4/12 + g(x, y, z)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x + 2\,y$, g armónica en $\mathbb{R}^3$ y $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2; y \leq 4\}$. Calcular el flujo del ∇f a través de la superficie S orientada de forma tal que el versor normal en cada punto cumpla $\breve{n}.(0, 1, 0) > 0$.

1. Sean $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ T(x,y) = 2\,x + y^2 - 2\,y$ un campo escalar de temperaturas, y $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\,y\}$. Hallar las temperaturas extremas sobre la curva C. Graficar la curva C y las curvas de nivel del campo escalar correspondientes a esos valores extremos.

2. Hallar la familia de curvas planas tales que en cada punto $P = (x_0, y_0)$, con $y_0 \neq 0$, la recta tangente a la curva en P corte al eje y en $(0, 2\,y_0)$.

3. Sean A, B y C los puntos donde el plano tangente a la superficie de ecuación $z = x^2\,y + y^2 + 4\,x\,y$ resulta paralelo al plano xy, y P la poligonal cerrada que tiene a los puntos mencionados como vértices. Calcular los puntos A, B y C y la circulación de $\vec{F}(x,y,z) = (-2\,y\,z + g(x), -4\,x\,z, -x)$ a lo largo de P, siendo $g \in C^1(\mathbb{R})$. Indicar gráficamente la orientación elegida para la poligonal.

4. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo $C^2(\mathbb{R}^3)$ con matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} 2\,y & 2\,y & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3\,x^2 & -2\,y & 3 \end{pmatrix}$$

Hallar el flujo del campo $\vec{F}$ sobre la superficie frontera del cuerpo limitado por $(x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 \leq 4$, indicando la normal utilizada.

5. Elegir una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de manera que la circulación del campo $\vec{F}(x,y) = (g(y), -x + 3\,y)$ a lo largo del perímetro del paralelogramo de vértices $(1,1)$, $(2,2)$, $(2,5)$ y $(1,4)$, recorrido en sentido antihorario, sea 6.

1. Determinar el punto en que la función $g(x, y, z) = x - y + 2z$ toma su valor máximo sobre la curva $C = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 = 1,\ x - y + z = 1\}$.

2. Siendo $f(x, y, z) = x^2 + z^2$ un campo escalar definido en $\mathbb{R}^3$ y $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 4,\ 1 \leq x + y + z \leq 2\}$, calcular el flujo del campo vectorial ∇f a través de S, indicando la normal utilizada.

3. Sea S la superficie esférica de centro $(2R, 0, 0)$ y radio R. El campo $\vec{F}(x, y, z) = (\, x\,h(x) + y, y\,h(x), 4\,z\,)$ satisface $\vec{F}(1, 1, 1) = (3, 2, 4)$. Hallar una función $h = h(x)$ para que el flujo saliente de $\vec{F}$ a través de S sea igual a 12 veces el volumen de la esfera. Escribir claramente las condiciones que debe cumplir la función h y verificarlas para la función hallada.

4. Sea la curva $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2,\ y = 1,\ 0 \leq z\}$. Calcular la circulación de $\vec{F}(x, y, z) = (\, x, x\,y + z, y^2 + g(z)\,)$ a lo largo de C desde el punto $(-2, y_0, z_0)$ hasta el punto $(2, y_0, z_0)$ sabiendo que $g \in C^1(\mathbb{R})$.

5. Calcular el volumen del sólido $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 \geq 2x,\ 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ 0 \leq z\}$.

FIUBA 2-10-09 Análisis Matemático II Integrador - Tema 1

1. Sea el campo de fuerzas $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \vec{F}(x, y) = (y, x)$ actuando sobre una partícula que se desplaza en el plano, desde el origen de coordenadas a un punto $\vec{R}_1 = (x_1, y_1)$ de la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$. Demostrar que el trabajo realizado por el campo de fuerzas sobre la partícula depende solamente del punto final $\vec{R}_1$ y no de la trayectoria y calcular él o los puntos $\vec{R}_1$ para el cual este trabajo es máximo.

2. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \vec{F}(x, y, z) = (x - 7, y, x + z)$. Calcular el flujo de $\vec{F}$ a través de la porción del plano normal a la curva de ecuación $\vec{\gamma}(t) = (t, t^3 - 5\,t + 3, t - 4),\ t \in [1, 4]$ en el punto $(2, 1, -2)$ en el primer octante. Indicar en un gráfico la normal utilizada.

3. Sea S la porción de cilindro $\vec{\alpha}(u, v) = (v, cos(u), sen(u))$, con $0 \leq u \leq \pi/2,\ 0 \leq v \leq u$. Graficar la superficie S y siendo $\vec{F}(x, y, z) = (P(x), Q(y, z), R(y, z))$, con $Q,\ R \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, y $P \in C^\infty(\mathbb{R})$, hallar la circulación de $\vec{F}$ sobre la curva frontera de S indicando claramente la orientación elegida para la curva.

4. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (x\,y + y + cos(x), x^2 + sen(y) + xy)$. Calcular la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de la curva solución de la ecuación diferencial $y\,y' + x - 1 = 0$ que pasa por el $(1, -1)$, con sentido de circulación antihorario y recorrida una sola vez.

5. Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (sen(y) + x, e^{x^2} + y, z)$ sobre la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z \leq 4\}$, con el vector normal alejándose del eje z.

1. Sea $D = \{(x,y) \in R^2 : 0 \leq y \leq x + 2 \wedge x^2 + y^2 \leq 4\}$ y ∂D su frontera, calcule $\int_{\partial D^+} \vec{f} \ . \ \vec{dl}$ sabiendo que $\vec{f}\ (x,y) = (xy - xg(x^2 - y^2), yg(x^2 - y^2))$ con $g \in C^2(R)$.

2. Sea la superficie S de ecuación $y = 2+\sqrt{x^2 + z^2}$ con $y \leq 5$, orientada de forma tal que su vector normal tiene componente y positiva. Calcular el flujo de $\vec{F}$ a través de S siendo $\vec{F}\ (x,y,z) = (x, y, z+g(x,y)))$ con $g \in C^2(R^2)$.

3. Sea $\vec{F}\ (x,y,z) = \frac{(ax,y,z)}{\|(ax,y,z)\|}$, y sea C el segmento orientado que va desde el punto $(2,2,2)$ al $(4,4,4)$. Calcule el o los valores de a para que $\int_C \vec{f} \ . \ \vec{dl}$= longitud del segmento.

4. Sea el campo vectorial $\vec{F}\ (x,y) = (1 + z, 2y, x)$, calcule la circulación de $\vec{F}$ sobre la curva C parametrizada por $\alpha(t) = (t, h(t), t^3 - e^{t^2-1})$,$0 \leq t \leq 1$; siendo $h(t)$ la solución del problema de valores iniciales de $\frac{dh(t)}{dt} + h(t) = t$, $h(0) = 0$.

5. Calcule los valores extremos de $f(x,y) = xy$ sobre los puntos de la curva $C = \{(x,y) \in R^2, y = x^2 + 1 con 0 \leq x \leq 4\}$.

1. Sean $\vec{X} = (x, y, z)$ y $\phi(x, y, z)$ la función potencial de $\vec{F}(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$. Sabiendo que $\phi(0, 0, 0) = 3$ calcule la integral de superficie del campo escalar $\vec{X} \cdot \vec{F}$ sobre la superficie de ecuación $\phi(x, y, z) = 7$.

2. Sea C una curva cerrada regular y simple incluida en $\mathbb{R}^2$ que satisface

$$\int_C \left(3x + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2y, 4y^2 - x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \cdot d\vec{l} = -6$$

con $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Hallar el área de la región encerrada por C.

3. Sean $H > 0$ y $R > 0$, graficar y calcular el volumen del sólido descripto por:

$$\begin{cases} y = r\ cos(\theta) \\ z = r\ sen(\theta) \quad\quad con\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq R \\ \dfrac{Hr}{R} \leq x \leq H \end{cases}$$

4. Calcular la circulación del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 - 3y, y - z, g(z))$ sobre la curva definida por $\vec{\alpha}(t) = (-t, t, t^2)$ con $-1 \leq t \leq 1$, sabiendo que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función con primera derivada continua.

5. Hallar la mínima distancia al origen de la curva plana que pasa por $(1, 4)$ y es solución de la ecuación $y^2\ dx + 4\ dy = 0$.